

FINAL – 11/12/2008 – TEMA 1

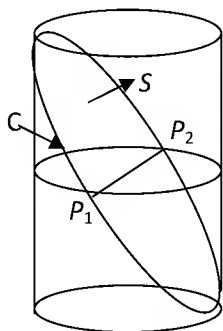
- Ej. 1) a) Hallar una parametrización de la curva intersección de las superficies $\begin{cases} z = 2x \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$
- b) Hallar la circulación del campo $\overline{F}(x, y, z) = (Q(x), 9, -2Q(x))$ a lo largo de la curva descrita en a) entre los puntos $P_1 = (1, 2, 2)$ y $P_2 = (-1, 2, -2)$ si se sabe que el valor de $Q(x)$ sobre el segmento que une dichos puntos es 1.

SOLUCIÓN: a) escribiendo la ecuación del cilindro elíptico en la forma: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9/2} = 1$ conviene tomar la

siguiente parametrización para esta superficie:
$$\begin{cases} x = 3 \cos(t) \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(t) \\ z = z \end{cases}$$

Por lo tanto una parametrización de C es: $\overline{g}(t) = (3 \cos(t), \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(t), 6 \cos(t))$

b) Como no se conoce $Q(x)$ se tiene que calcular la circulación por el teorema del Rotor, para ello consideramos la superficie abierta S como se ve en la figura, cuya frontera es C entre los puntos P_1 y P_2 y el segmento de recta que une dichos puntos.



Calculamos el Rotor del campo:

$$\nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q(x) & 9 & -2Q(x) \end{vmatrix} = (0, -2Q(x), 0)$$

El Teorema del Rotor dice que la circulación del campo F de clase C^1 , a lo largo de la curva C (frontera de la superficie S) coincide con el flujo del Rotor del campo a través de la superficie suave S , es decir:

$$\int_{\partial S} \overline{F} \cdot d\overline{x} = \iint_S \nabla \times \overline{F} \cdot \vec{n} \, ds, \text{ siendo la frontera de } S \text{ la unión de la curva } C \text{ y el segmento } \overline{P_1 P_2}. \text{ Entonces,}$$

sabiendo que el valor de $Q(x)$ sobre el segmento que une dichos puntos es 1 y que el vector normal al plano $z = 2x \rightarrow 2x - z = 0$ es: $(2, 0, -1)$, el segmento de recta tiene ecuación: $\overline{g}(\lambda) = (1, 2, 2) + \lambda(-2, 0, -4)$

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{x} + \int_{\overline{P_1 P_2}} \overline{F} \cdot d\overline{x} = \underbrace{\iint_S (0, -2Q(x), 0) \cdot (2, 0, -1) ds}_0$$

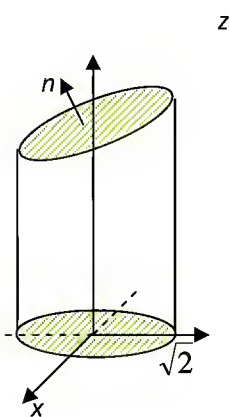
$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{x} = - \int_{\overline{P_1 P_2}} \overline{F} \cdot d\overline{x} = - \int_0^1 (1, 9, -2) \cdot (-2, 0, -4) dt = - \int_0^1 -6 dt = 6$$

Respuesta: La circulación pedida es 6.

Ejercicio 2. Sea $D = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq 2, -1 \leq z \leq a(y+4)\}$, con $a \in \mathbb{R}^+$. Demostrar que el flujo del campo vectorial $\overline{f}(x, y, z) = (0, 0, x^2 + y^2)$ sobre la tapa superior de la región D es independiente de a y calcular su valor indicando el sentido de la normal utilizada.

SOLUCIÓN:

El flujo a través de la tapa se calcula mediante integrales de superficie.



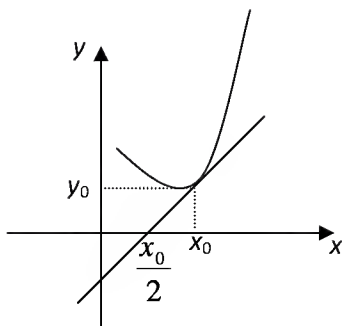
Siendo la ecuación de la tapa superior: $z = a(y+4)$, definimos la función $F(x, y, z) = z - a(y+4)$ cuya superficie de nivel 0 es el plano considerado. Un vector normal a la superficie está dado por $\vec{n} = \nabla F = (0, -a, 1)$ luego, el flujo es:

$$\begin{aligned} \text{Flujo} &= \iint_S \overline{f} \cdot \vec{n} \, ds = \int_D \underbrace{(0, 0, x^2 + y^2) \cdot (0, -a, 1)}_{x^2 + y^2} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{4}{4} d\varphi = 2\pi \end{aligned}$$

Respuesta: Quedó demostrado que el flujo no depende del valor de a . Su valor es 2π .

Ejercicio 3. Hallar las curvas que satisfacen que en todo punto (x_0, y_0) , su recta tangente corta al eje x en el punto $\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$.

Solución:



La pendiente de la recta tangente, que pasa por los puntos

(x_0, y_0) y $\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$ es:

$$y' = \frac{y_0}{x_0 - \frac{x_0}{2}} \Rightarrow y' = \frac{y_0}{\frac{x_0}{2}} \Rightarrow y' = \frac{2y_0}{x_0}$$

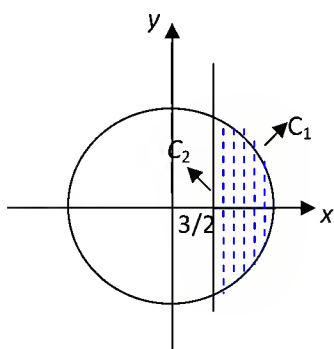
$$y' = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x} dx \Rightarrow \ln y = 2 \ln x + \ln C \Rightarrow \ln y = \ln(C x^2)$$

Solución General: $y = C x^2$

Respuesta: Las curvas que satisfacen lo pedido son: $y = C x^2$

Ejercicio 4. Sea $R = \left\{ (x, y) / x^2 + y^2 \leq 9, x \geq \frac{3}{2} \right\}$. Calcular el área de R integrando un campo vectorial conveniente a lo largo de su curva frontera.

Solución: Para encontrar el área de la región sombreada, consideramos un campo vectorial $\overline{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ de clase C_1 y siendo la región R simplemente conexa,



cuya frontera C es una curva de Jordan, podemos aplicar el teorema de Green que dice:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Elegimos el campo siguiente: $\overline{F}(x, y) = (0, x)$ y

calculamos $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 0 = 1$. La curva C es la unión

de la curva C_1 (arco de circunferencia) con C_2 (segmento $\overline{P_1 P_2}$). Los puntos de intersección de C_1 y C_2 son:

Elegimos para el arco de la circunferencia la parametrización dada por: $\overline{g}(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t))$ con

$t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$ y para el segmento $\overline{P_1 P_2}$ la parametrización: $\overline{h}(t) = \left(\frac{3}{2}, t \right)$

$$\int_{C_1} x dy + \int_{C_2} x dy = \underbrace{\iint_R 1 dx dy}_{\text{Área de } R} \Rightarrow \text{Área de } R = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \cos(t) 3 \cos(t) dt + \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{3}{2} dt$$

$$\Rightarrow \text{Área de } R = 9 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t) dt + \frac{3}{2} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = 9 \left(\frac{1}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{9\sqrt{3}}{4} = 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Respuesta: Área (R) = $3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Observación: $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.

Ejercicio 5. Hallar el punto sobre la curva definida por $(x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 1$ que haga mínima la circulación del campo vectorial $\vec{f}(x, y) = (x, y)$ desde el origen hasta dicho punto.

Solución: El campo dado \vec{f} es el gradiente de un potencial pues, si sus componentes son

$P(x, y) = x$; $Q(x, y) = y$ resulta $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ por lo tanto la integral de línea no depende de la curva que una un punto de la circunferencia con el origen.

Una parametrización de la circunferencia es: $\vec{g}(t) = (2 + \cos(t), 2\sqrt{3} + \sin(t))$.

Calculamos la función Potencial, sabiendo que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, y) = x$; $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x, y) = y$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x \Rightarrow \phi = \frac{x^2}{2} + C(y), \text{ de donde } \frac{\partial \phi}{\partial y} = C'(y) = y \Rightarrow C(y) = \frac{y^2}{2} + K$$

La función potencial es: $\phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + K$.

Por el teorema fundamental de integral de línea para Campos Vectoriales Gradiente ($\vec{F} = \nabla \phi$) tenemos que:

“ Si $\phi: R^2 \rightarrow R$ es de clase C^1 y $\vec{g}: [a, b] \rightarrow R^2$ es una trayectoria seccionalmente suave, de clase C^1 , entonces:

$\int_c \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{g}(b)) - \phi(\vec{g}(a))$ siendo $\vec{g}(a)$; $\vec{g}(b)$ el punto inicial y el punto final de la curva”. Luego:

$$\begin{aligned}
\int_C \nabla \phi \cdot \overline{ds} &= \int_{(0,0)}^{(2+\cos(t), 2\sqrt{3}+\sin(t))} (x, y) \cdot \overline{ds} = \phi(2+\cos(t), 2\sqrt{3}+\sin(t)) - \phi(0,0) = \\
&= \frac{(2+\cos(t))^2}{2} + \frac{(2\sqrt{3}+\sin(t))^2}{2} = \frac{4+4\cos(t)+\cos^2(t)+12+4\sqrt{3}\sin(t)+\sin^2(t)}{2} = \\
&= 8+2\cos(t)+2\sqrt{3}\sin(t)
\end{aligned}$$

Llamando: $h(t) = 8 + 2\cos(t) + 2\sqrt{3}\sin(t)$ determinamos los extremos de esta función de una variable, los puntos críticos son:

$$h'(t) = -2\sin(t) + 2\sqrt{3}\cos(t) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} \text{ ó } t = \frac{7\pi}{6}$$

Como $h(\frac{\pi}{6}) = 8 + 2\sqrt{3}$; $h(\frac{7\pi}{6}) = 8$ el mínimo se produce para $t = \frac{7\pi}{6}$

Respuesta: La circulación es mínima desde el punto de la curva $(x, y) = (2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3} + \frac{1}{2})$